MAI 1 – řešení 9. domácího úkolu:

(1.) Důkazy nerovností – užitím vyšetření monotonie funkce a extrémů

a) Máme ukázat, že pro $\forall x \in (0,+\infty)$ je

$$\ln x \leqq x-1 \iff x-1-\ln x \geqq 0$$

vyšetříme chování fce $f(x) = x-1-\ln x$ v $(0,+\infty)$:

1) f je spojitá v $(0,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0+} (x-1-\ln x) = „-1-(-\infty)" \overset{AL}{=} +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1-\ln x) = „\infty-\infty" = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\Big(1-\underbrace{\frac{\ln x}{x-1}}_{\to 0\ (l'H.)}\Big) \overset{AL}{=} \infty$

tedy (2 1, a 2) $\Rightarrow$ f má v $(0,+\infty)$ globální minimum – „spravně" f'": $f'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $f'(x)=0 \iff x=1$

($x=1$ – jediný bod „podezřelý" z extrému – f' ex. v $(0,+\infty)$),

$f(1)=0$, tedy $f(x) \geqq f(1)=0$ (a máme dokázáno tvrzení)

ověření („pro pořádek"):

	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

tj. f klesá v $(0,1)$, f roste v $(1,+\infty)$ $\Rightarrow$ v bodě $x=1$ je ostré lokální, a tedy i globální minimum.

„Graficky": přímka $y=x-1$ je tečna ke grafu fce $\ln x$ v bodě $[1,0]$, tj. graf fce $\ln x$ je „pod" touto tečnou v $(0,+\infty)$ (až „v bodě")

b) <u>máme ukázat, že pro $x \in (0,+\infty)$ je $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$</u>

<u>poznámka:</u> pro $f(x) = \ln(x+1)$ je $T_1^{f,0}(x) = x$

a $T_2^{f,0}(x) = x - \frac{x^2}{2}$,

tj. v $(0,+\infty)$ je graf $\ln(x+1)$ „pod" tečnou v bodě $[0,0]$ a „nad" grafem polynomu $T_2^{f,0}(x)$ („mezi Taylorovými polynomy 1. a 2. stupně v bodě $a=0$)

(i) <u>nerovnost $\ln(x+1) < x$ v $(0,+\infty)$ plyne z úlohy a)</u>

($x+1 = t$, $x = t-1$, tj. dle a) platí $\ln t < t-1$ v $(0,+\infty)$ tj. i pro $t \in (1,+\infty)$, tedy $\ln(x+1) < x$ v $(0,+\infty)$)

(ii) ? <u>$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1)$</u> v $(0,+\infty)$ $\Leftrightarrow$? $\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} > 0$ v $(0,+\infty)$

označme-li $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$, pak

(1) $g(0) = 0$, g je spojitá v $\langle 0,+\infty)$

(2) $g'(x) = \frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{1 + (x-1)(x+1)}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$,

tj. $g'(x) > 0$ v $(0,+\infty)$

a tedy z (1) a (2) plyne, že $g(x)$ je rostoucí v $\left.\begin{array}{l}\langle 0,+\infty) \\ g(0)=0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$g(x) > 0$ v $(0,+\infty)$ (což jsme měli ukázat)

c) (i) $e^{\frac{x}{x+1}} < x+1$ v $(0,+\infty)$

(ii) $e^{\frac{x}{x+1}} \leqq x+1$ v $(-1,+\infty)$

} zde se omlouvám za chybu v zadání – pro interval v $(-1,+\infty)$ měla být ostrá nerovnost (v domácím úkolu bylo „odhaleno") (o ostrou nerovnost byl „špatně" interval)

(i) ? $e^{\frac{x}{x+1}} < x+1$ v $(0,+\infty)$

označme-li $f(x) = x+1 - e^{\frac{x}{x+1}}$, máme pak ukázat, že $f(x) > 0$ v $(0,+\infty)$:

(1) $f(0) = 0$, f je spojitá v $\langle 0,+\infty)$,

$$f'(x) = 1 - e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = 1 - e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

– kdyby $f'(x) > 0$ v $(0,+\infty)$, tj. f by rostla v $\langle 0,+\infty)$, pak by důkaz byl hotov – ale v tomto příkladě to „není" tak vidět, jako v příkladu a) – co tedy udělat?

Třeba: (než přijde na něco „lepšího"):

$$f'(0) = 0, \quad (f'(x))' = -e^{\frac{x}{x+1}} \left(\frac{1}{(x+1)^4} - \frac{2}{(x+1)^3} \right) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^4} (2x+1)$$

tedy $(f'(x))' (= f''(x)) > 0$ v $(0,+\infty)$ (dokonce v $(-\frac{1}{2},+\infty)$),

tedy $f'(x)$ roste v $\langle 0,+\infty)$, $f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ v $(0,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ je rostoucí v $\langle 0,+\infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$ v $(0,+\infty)$

(což jsme měli ukázat)

(ii) $e^{\frac{x}{x+1}} \leqq x+1$ v $(-1,+\infty)$:

v $x = 0$: $e^0 = 1$ – platí

v $(0,+\infty)$ máme ukázáno v (i), tedy „zbývá" interval $(-1,0)$!

v $(-1,0\rangle$: $f(0)=0$, a máme-li ukázat, že $f(x) \geqq 0$ i v $(-1,0\rangle$, měli bychom „úspěch", pokud bychom ukázali, že $f(x)$ je v $(-1,0\rangle$ klesající funkce:

zkusme! (což máme spočítáno) $f'(x) = 1 - e^{\frac{x}{x+1}} \dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$? „nerovnice",

tedy spočítejme $f''(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \dfrac{1}{(x+1)^4} (2x-1)$:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, tj. v $(-1,0\rangle$:

	-1		$-\frac{1}{2}$		0
f''		$-$		$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	

tj. f' klesá v $(-1,-\frac{1}{2}\rangle$, roste v $\langle -\frac{1}{2},0\rangle$, $f'(0)=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f'(x)<0$ v $\langle -\frac{1}{2},0\rangle$ $\quad \left(f'(-\frac{1}{2}) = 1 - e^{-1}\cdot 4 < 0 \right)$

ale $\lim\limits_{x\to -1+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1+} \left(1 - e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \dfrac{1}{(1+x)^2} \right) = 1$,

neboť $\lim\limits_{x\to -1+} e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \dfrac{1}{(1+x)^2} = \lim\limits_{x\to -1} e \cdot e^{-\frac{1}{x+1}} \cdot \dfrac{1}{(x+1)^2} =$

$\underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{t\to +\infty} e \cdot \dfrac{t^2}{e^t} \underset{2\times \text{l'H.}}{=} 0$,

$t = \dfrac{1}{x+1}$

tedy víme jen, že pokud f' je spojitá fce v $(-1,-\frac{1}{2}\rangle$, $\lim\limits_{x\to -1+} f'(x) = 1$ a $f'(-\frac{1}{2}) < 0$, že v $(-1,-\frac{1}{2})$ musí ležet nulový bod $f'(x)$, tj. $f'(x_0)=0$ pro $x_0 \in (-1,-\frac{1}{2})$ a

tedy $f'(x)>0$ v $(-1,x_0)$ $\Rightarrow$ f roste v $(-1,x_0\rangle$ a

$f'(x)<0$ v $(x_0,0)$ $\Rightarrow$ f klesá v $\langle x_0, 0\rangle$

Tedy, v $\langle x_0, -\frac{1}{2}\rangle$ je $f(x) \geq f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} > 0$
a tedy i v $(-1, x_0\rangle$ je $f(x) \geq 0$, neboť f je rostoucí v $(-1, x_0)$
a $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 0$;

tedy jsme ukázali, že i v $(-1,0)$ je $f(x) > 0$, tj. platí

$$e^{\frac{x}{x+1}} < x+1 \quad \text{v } (-1,0).$$

Tedy „dohromady": v $(-1,+\infty)$ je $e^{\frac{x}{x+1}} \leqq x+1$.

<u>Hezké i graficky:</u> Je-li $g(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$, $g'(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$,
tj. $g'(0) = 1$ a
$y = x+1$ je rovnice tečny ke grafu $g(x)$
v bodě $[0,1]$;
tedy, graf fce g je „pod" touto tečnou
v $(-1,+\infty) \setminus \{0\}$ a $x = -\frac{1}{2}$) má
fce $g(x)$ inflexní bod $\left(f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0\right)$.

Tato úloha (ii) je lehce těžší, v zadání jsem špatně napsala interval (byl ze starší verze (ii)), chtěla jsem vám zadat v úloze (i) – omluvte mne, prosím).

<u>Poznámka!</u> Kolega Tomáš Souřada ukázal řešení (ii) lépe – jednodušší cestou – provedl v zadání „substituci"
$\frac{x}{x+1} = t$ – a pak se mu „počítalo" lépe – vyzkoušejte si,
nebo poprosím kolegu, zda mohu jeho řešení vám všem „na desku" ukázat.

② Máme ukázat, že platí:

Je-li $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$) v (a,b), pak pro lib. $x_0 \in (a,b)$ a všechna $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$ je

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{resp. } f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

(Tedy graficky: $f''(x) > 0$ v (a,b) – graf f v (a,b) „je" „nad tečnou ke grafu f v $[x_0, f(x_0)]$ všude" kromě bodu dotyku pro lib. $x_0 \in (a,b)$; $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ je rovnice tečny ke grafu f v $[x_0, f(x_0)]$.)

Dk: zvolme lib. $x_0 \in (a,b)$; pak $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pro $x \neq x_0$
$\Leftrightarrow$ $g(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) > 0$ v $(a,b) \setminus \{x_0\}$.

1) $g(x_0) = 0$

2) $g'(x_0) = 0$ $\quad (g'(x) = f'(x) - f'(x_0))$

3) $g''(x) = f''(x) > 0$ v (a,b) $\Rightarrow$ $g'(x)$ je rostoucí a spojitá v (a,b), $g'(x_0) = 0$, tedy

$g'(x) < 0$ v (a, x_0) $\Rightarrow$ $g(x)$ je klesající v $(a, x_0\rangle$, tj. $g(x) < g(x_0)$ v (a, x_0)
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; (=0)$

a $g'(x) > 0$ v (x_0, b) $\Rightarrow$ $g(x)$ je rostoucí v $\langle x_0, b)$, tj. $g(x) > g(x_0) = 0$

tj. $g(x) > 0$ v $(a,b) \setminus \{x_0\}$, tj. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ v $(a,b) - \{x_0\}$.

③ Máme ukázat, že platí:

$$f'(x) = g'(x) \in R \ \text{ v } (a,b) \implies \exists\, C \in R : g(x) = f(x) + C, \ x \in (a,b)$$

(a odtud plyne, že je-li $F(x)$ primitivní fce k $f(x)$ v (a,b), pak všechny primitivní fce „mají tvar" $F(x)+C$, $C \in R$.)

Dk. Nechť $f'(x) = g'(x) \in R$ v (a,b); pak, označíme-li

$h(x) = g(x) - f(x)$ v (a,b), je $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ v (a,b),

(i) a tedy lze užít (nerovnosti v souvislosti s derivací!)

$h(x)$ je neklesající i nerostoucí v (a,b), tedy konstantní,

tj. $g(x) - f(x) = C$, $C \in R$, $\Rightarrow g(x) = f(x) + C$ v (a,b).

(ii) nebo „vědečtější" důkaz užitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Lagrangeova věta je „skrytá" zde v (i) v důkazech souvislosti znaménka derivace a monotonie fce v (a,b))

Zvolme lib. $x_0 \in (a,b)$, a lib. $\forall x \neq x_0$ (BÚNO $x > x_0$):

$$\left.\begin{array}{l} \text{v } \langle x_0, x\rangle \text{ je } h(x) = g(x) - f(x) \text{ fce spojitá,} \\ \text{a } h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0 \ \text{ v } (x_0, x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\underset{\text{Lagrangeova věta}}{\Longrightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} \exists\, \xi \in (x_0, x) : h(x) - h(x_0) = h'(\xi)(x - x_0) \\ \text{ale } h'(\xi) = 0, \ \xi \in (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ h(x) - h(x_0) = 0$, $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$,

tj. $h(x) = h(x_0) = C$ v (a,b), (i v x_0)

tj. opět: $g(x) = f(x) + C$, $x \in (a,b)$

(4) <u>Taylorův polynom</u> $\left(T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right)$

a) $\underline{f(x) = \sqrt{1+x}}$, a $T_n^{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$
$(a=0)$

funkce f má v bodě $a=0$ derivace všech řádů,

$k \in N$: $f^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot \ldots \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$ v $\mathcal{U}(0)$

a $f^{(k)}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \ldots \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)$

$$T_n^{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \ldots \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} x^k$$

a obvykle se značí $\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \ldots \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \binom{\frac{1}{2}}{k}$,

tak zpravidla najdeme $\left(\text{a } \binom{\frac{1}{2}}{0} = 1 \right)$ T-polynom pro $f(x) = \sqrt{1+x}$ ve tvaru $T_n^{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k$.

(obecně: $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in R$, $x > -1$: $T_n^{f,0}(x) = \sum_{0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$)

b) $\underline{f(x) = \ln(1+\sin(2x))}$ – chceme $T_2^{f,0}(x)$:

$f(x)$ je definovaná, stejně $f'(x)$ i $f''(x)$ v okolí bodu $a=0$,
napsat pak $T_2^{f,0}(x)$ je zde vlastně „cvičení" derivací;

$f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 2$

(derivace složené funkce)

$$f''(x) = 2\left(\frac{\cos(2x)}{1+\sin(2x)}\right)' = 2\,\frac{-\sin(2x)\cdot 2\,(1+\sin(2x)) - \cos 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}{(1+\sin(2x))^2}$$

(nemusíme nijak upravovat – dosazeme „jen" $f''(0)$!)

$f''(0) = 2\,(-2) = 4$;

tedy $T_2^{f,0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \dfrac{f''(0)}{2!}\, x^2$, tedy zde

$\underline{T_2^{f,0}(x) = 2x - 2x^2}$

(5) Odhad chyby při aproximaci funkce $f(x) = \sin x$ Taylorovým polynomem 3. stupně pro $|x| \leq \frac{1}{2}$, tj. v intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$T_3^{f,0}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$ a platí $\sin x = T_3^{f,0}(x) + R_3^{f,0}(x)$,

kde (Lagrangeův tvar „zbytku") je $R_3^{f,0}(x) = \dfrac{(\sin x)^{(4)}_{x=\xi}}{4!}\, x^4$,

kde ξ je „mezi 0 a x"

$(\sin x)^{(4)} = \sin x$, tj.

$R_3^{f,0}(x) = \dfrac{\sin \xi}{4!}\, x^4$, tj. v $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ (tj. $|x| \leq \frac{1}{2}$)

je odhad: $|R_3^{f,0}(x)| \leq \dfrac{1}{4!} \cdot \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{24} \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{384}$

Odhad chyby ve výpočtu $\sin x$ pro $|x| \leq \frac{1}{2}$ pomocí $T_3^{f,0}$ lze ale „vylepšit", neboť $T_3^{f,0}(x) = T_4^{f,0}(x)$ (sudé derivace fce $\sin x$ jsou pro $x=0$ nulové), tedy vlastně lze uvažovat „chybu", tj. zbytek v Lagrangeově tvaru $R_5^{f,0}(x)$, tj.:

$$\left| R_5^{f,0}(x) \right| = \left| \frac{\cos\xi}{5!}\, x^5 \right| \leq \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5} \quad \text{pro } |x| \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{tj. } \left| R_5^{f,0}(x) \right| \leq \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{32} = \frac{1}{3840} \quad \text{– „lepší" !}$$

<u>„A malý pokus"</u>:

	T:	Kalkulačka:
$\sin(0{,}1) \cong$	$0{,}09984\ldots$,	$0{,}0998334\ldots$
$\sin(0{,}01) \cong$	$0{,}00999984$,	$0{,}009999833\ldots$

(6) <u>Vypočtěte limitu užitím Taylorova polynomu:</u>

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$ – nahradíme-li polynomy 4. stupně, pak „zbytek" v Taylorově vzorci $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, tj. $R_n(x) = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$, tedy $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_4(x)}{x^4} = 0 \text{ zde}}$, pokud nahradíme pomocí $T_4^{f,0}(x)$ (tj. $a=0$, potřebujeme limitu pro $x\to 0$!)

tedy $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ a

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left((x^2)^2\right) \quad (\text{pro } x \to 0)$$

Taylorův polynom pro funkci $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ umíme buď „přímo" spočítat z definice $T_4^{f,0}(x)$ (tj. derivování fce $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ v bodě $x=0$), nebo umíme „složit" Taylorův polynom pro funkci e^x $T_2^{e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ s funkcí $\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ – vyzkoušejte, že dostanete totéž"; a potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o_1(x^4) - \left(\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) + o_2(x^4)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)}{\cancel{x^4}} + \underbrace{\frac{o(x_4)}{x^4}}_{\to 0}\right) = -\frac{1}{12}$$

(součet dvou „malých" o je opět „malé o")

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{t\to 0+}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right) =$$

$x = \frac{1}{t}$ ($\Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$)

pro $x \to \infty$: $t \to 0(+)$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{o(t^2)}{t^2}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}$$

($f(t) = o(t^2)$ pro $t \to 0$, jestliže $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2} = 0$, a pro $\ln(t+1)$ je $T_2^0(x) = t - \frac{t^2}{2}$)